Universidad Nacional de Ingeniería **10-03-07**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-3**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DE LA CUARTA PRÁCTICA
DE CALCULO NUMERICO
PARTE B

Apellidos y Nombres	Código	Sección	Nota

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Marque la alternativa que considere correcta o complete según el caso:

Pregunta 1

Al integrar I=$\int_1^2 e^{2x+5}dx$, cuántas particiones del método del trapecio se requieren para tener 3 cifras decimales exactas.

Solución

$$\varepsilon = \frac{(b-a)}{12}h^2|f''(\varepsilon)| \le \frac{(b-a)}{12}h^2 M \le 0.5x10^{-3} \quad M = \max|f''(\varepsilon)| \quad 1 \le \varepsilon \le 2$$

$$f''(x) = 4e^{2x+5} \quad M = 4e^9$$

$$\frac{4e^9}{12n^2} \le 0.5x10^{-3} \quad \Rightarrow n = 2325$$

Pregunta 2

Sea la integral $\int_a^{2a}(ax^3+1)dx$, para la cuadratura de Romberg, obtener R_{2x2}

Solución

$$h = a$$

$$R_{11} = \frac{h}{2}(f(a) + f(2a)) = \frac{9}{2}a^5 + a$$

$$h = a/2$$

$$R_{21} = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f\left(\frac{3a}{2}\right) + f(2a)\right) = \frac{63}{16}a^5 + a$$

$$R_{22} = \frac{4R_{21} - R_{11}}{3} = \frac{15}{4}a^5 + a$$

Pregunta 3

Si $\begin{array}{l} y' = 2x + 3y \\ y(1) = 2 \quad h = 0.1 \end{array}$, Obtener y(1.1) usando Taylor de orden 3.

Solución

$$
\begin{aligned}
y' &= 2x + 3y \\
y'' &= 2 + 3y' \\
y'' &= 2 + 6x + 9y \\
y''' &= 6 + 9y' \\
y''' &= 6 + 18x + 27y
\end{aligned}
$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 2 \quad h = 0.1$$

$$x_1 = x_0 + h = 1.1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h^2}{2}\left(2 + 6x_0 + 9y_0\right) + \frac{h^3}{6}\left(6 + 18x_0 + 27y_0\right) = 2.943$$

Pregunta 4

$y'' = 2xy' + x^2 y + \mathrm{sen}(x) \quad y'(1) = -2 \quad y(1) = 1$

Escriba un programa en MATLAB que realice 05 pasos de Euler (h=0.1).

Solución

$$
\begin{array}{ll}
y' = z & y(1) = 1 \\
z' = 2xz + x^2 y + sen(x) & z(1) = -2
\end{array}
$$

```
x(1)=1; y(1)=1; z(1)=-2; h=0.5;
for i=1:5
        x(i+1)=x(i)+h;
        y(i+1)=y(i)+h*z(i);
        z(i+1)=z(i)+h*(2*x(i)*z(i)+x(i)^2*y(i)+sin(x(i)));
end
```

Pregunta 5

Dada la siguiente integral

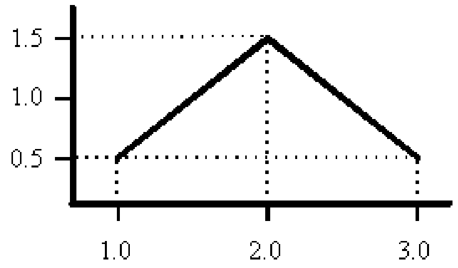
$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

Averiguar cuantas particiones serán necesarias usando la fórmula del trapecio compuesto para garantizar un error menor que 0.01.

a) 20 b) 18 $\boxed{\text{c) 22}}$ d) 21 e) 15

Pregunta 6

Calcule numéricamente la integral de la figura adjunta empleando la regla del trapecio y la regla de Simpson. ¿Qué método es más exacto en este caso? ¿Por qué?



Solución

$$I_T = \frac{1}{2}\left(f(1) + 2 * f(2) + f(3)\right) = \frac{1}{2}(0.5 + 2 * 1.5 + 0.5) = 2$$
$$I_S = \frac{1}{3}\left(f(1) + 4 * f(2) + f(3)\right) = \frac{1}{3}(0.5 + 4 * 1.5 + 0.5) = \frac{7}{3}$$

El trapecio da resultados exactos al integrar cualquier polinomio de grado 1.

Pregunta 7

Determinar los coeficientes A, B y C de modo que la fórmula :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \underbrace{Af(0) + Bf\left(\frac{1}{2}\right) + Cf(1)}_{\text{fórmula}}$$

Sea exacta para polinomio de grado menor o igual a 2.

Solución

$$f(x) = 1 \quad \int_0^1 1\,dx = 1 = A + B + C$$
$$f(x) = x \quad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = A(0) + B\left(\frac{1}{2}\right) + C(1)$$
$$f(x) = x^2 \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} = A(0)^2 + B\left(\frac{1}{2}\right)^2 + C(1)^2$$
$$A = 1/6 \quad B = 2/3 \quad C = 1/6$$

Pregunta 8

Hallar $\int_0^1 e^{x^2} \sin x dx$, usando el método Romberg usando los pasos de 1 y 0.5

Solución

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) = 1.1437$$
$$T_2 = \frac{1/2}{2}\left(f(0) + 2f(0.5) + f(1)\right) = 0.8796$$
$$I = \frac{4T_2 - T_1}{3} = 0.7916$$

Pregunta 9

Considere el problema de valor inicial:

$$y' = (y - x - 1)^2 + 2$$
$$y(0) = 1$$

a) Muestre que $y(x) = 1 + x + \tan x$ es solución exacta del problema dado
b) Obtener una aproximación para y(0.1) usando Runge Kutta de orden 2 con h=0.1

Solución

a)

$$(1 + x + \tan x)' = 1 + 1 + \tan^2 x = (1 + x + \tan x - x - 1)^2 + 2 = 2 + \tan^2 x$$

b)

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad h = 0.1$$
$$x_1 = x_0 + h$$
$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2$$
$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.201$$
$$y_1 = y_0 + 1/2(k_1 + k_2) = 1.2005$$

Pregunta 10

Considere el siguiente P.V.I

$$\begin{cases} t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln t\ , & 1 \le t \le 1.5 \\ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 0 \end{cases}$$

obtener $y(1.2)$ usando Euler con $h = 0.1$ .t

$y(1.2)$=.................................

Solución

$$y'' = t\ Ln(t) + \frac{2y'}{t} - \frac{2y}{t^2}$$

$$y' = z$$

$$z' = t\ Ln(t) + \frac{2z}{t} - \frac{2y}{t^2}$$

$$t_0 = 1 \quad y_0 = 1 \quad z_0 = 0$$

$$t_1 = t_0 + h = 1.1$$

$$y_1 = y_0 + h\ z_0 = 1$$

$$z_1 = z_0 + h\left(t_0\ Ln(t_0) + \frac{2z_0}{t_0} - \frac{2y_0}{t_0^{\ 2}}\right) = -0.20$$

$$t_2 = t_1 + h = 1.2$$

$$y_2 = y_1 + h\ z_1 = 0.98$$

$$z_2 = z_1 + h\left(t_1\ Ln(t_1) + \frac{2z_1}{t_1} - \frac{2y_1}{t_1^{\ 2}}\right) = -0.3912$$

$y(1.2)$=......0.98…….

Los Profesores